

AKTUARSKA MATEMATIKA

FUNKCIJA DOŽIVLJENJA l_x : funkcija koja određenoj starosti pridružuje broj živih lica te starosne dobi;

VJEROVATNOĆA DA ĆE OSOBA STARA x GODINA DOŽIVJETI NAREDNIH n GODINA:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

VJEROVATNOĆA DA OSOBA STARA x GODINA NEĆE DOŽIVJETI NAREDNIH n GODINA:

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x \Rightarrow {}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Zadatak br. 1

Kolika je vjerovatnoća da će lice staro 30 godina:

a) doživjeti narednu godinu.

b) umrijeti u toku nje.

Rješenje:

a) $x = 30$

$${}_1p_{30} = \frac{l_{31}}{l_{30}} = \frac{80.875}{81.105} = 0,997$$

b)

$${}_1q_{30} = 1 - {}_1p_{30} = 0,003$$

Zadatak br. 2

Kolika je vjerovatnoća da će obje osobe stare 40 i 50 godina biti žive nakon 20 godina ukoliko se radi o nezavisnim događajima?

Rješenje:

A – događaj da osoba stara 40 godina doživi narednih 20 godina;

B – događaj da osoba stara 50 godina doživi narednih 20 godina;

$$p(A) = {}_{20}P_{40} = \frac{l_{60}}{l_{40}}$$

$$p(B) = {}_{20}P_{50} = \frac{l_{70}}{l_{50}}$$

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{l_{60}}{l_{40}} \cdot \frac{l_{70}}{l_{50}} = 0,529$$

Zadatak br. 3

Kolika je vjerovatnoća da će od dva lica stara 40 i 50 godina doživjeti narednih 30 godina:

a)bar jedno;

b)tačno jedno;

c)nijedno;

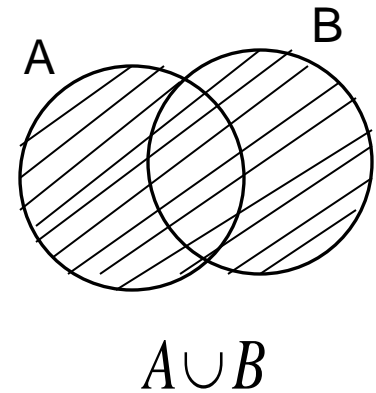
ako su događaji nezavisni.

Rješenje:

A – događaj da će lice staro 40 godina doživjeti narednih 30 godina;

B - događaj da će lice staro 50 godina doživjeti narednih 30 godina;

Zadatak br. 3



a) Bar jedno

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$$

$$p(A) = \frac{l_{70}}{l_{40}} = \frac{47.185}{78.421} = 0,6017$$

$$p(B) = \frac{l_{80}}{l_{50}} = \frac{21.269}{74124} = 0,287$$

A, B – nezavisni dogadjaji $\Rightarrow p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$

$$p(A \cup B) = \frac{l_{70}}{l_{40}} + \frac{l_{80}}{l_{50}} - \frac{l_{70} \cdot l_{80}}{l_{40} \cdot l_{50}}$$

Zadatak br. 3

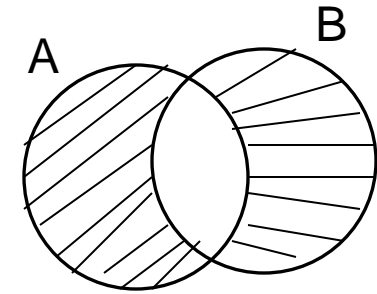
$$p(A \cup B) = \frac{l_{70}}{l_{40}} + \frac{l_{80}}{l_{50}} - \frac{l_{70} \cdot l_{80}}{l_{40} \cdot l_{50}}$$

$$p(A \cup B) = \frac{47.185}{78.421} + \frac{21.269}{74.124} - \frac{47.185 \cdot 21.269}{78.421 \cdot 74.124}$$

$$p(A \cup B) = 0,718 \approx 71,8\%$$

Zadatak br. 3

b) tačno jedno



$A \nabla B$

Simetrična razlika: $A \nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$$A \cup B = (A \nabla B) + (A \cap B) \Rightarrow A \nabla B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$p(A \nabla B) = p(A \cup B) - p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A \nabla B) = 0,718 - \frac{47.185}{78.421} \cdot \frac{21.269}{74.124}$$

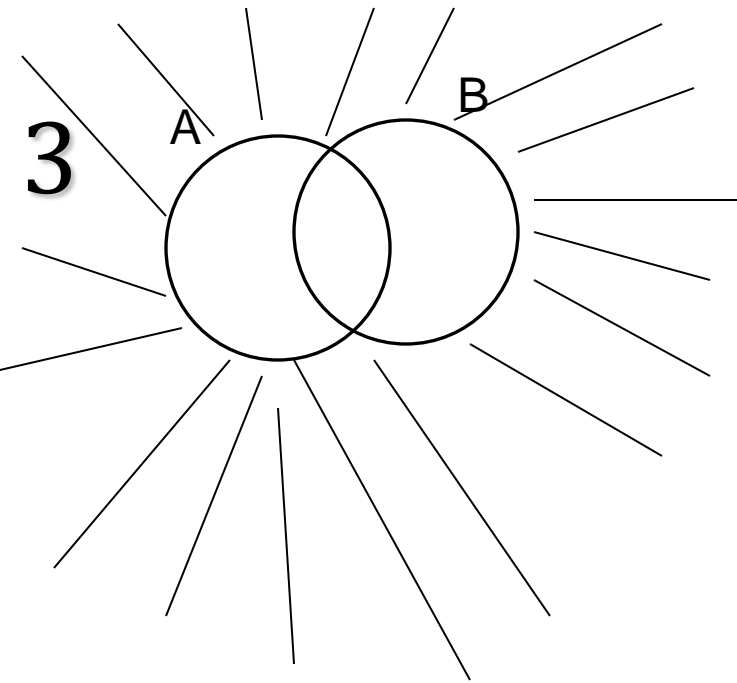
$$p(A \nabla B) = 0,545 \approx 54,5\%$$

Zadatak br. 3

c) nijedno

$$\overline{p(A \cup B)} = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,718$$

$$\overline{p(A \cup B)} = 0,282 \approx 28,2\%$$



Zadatak br. 4

Kolika je vjerovatnoća da će lice staro 30 godina doživjeti narednih 15 godina, a onda umrijeti u toku narednih 10 godina?

Rješenje:

$$p = \frac{l_{45}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{45} - l_{55}}{l_{45}} = \frac{l_{45} - l_{55}}{l_{30}}$$

$$p = \frac{76.619 - 70.442}{81.105} = \frac{6.177}{81.105} = 0,07616$$

INTENZITET SMRTNOSTI

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}$$

$$\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}$$

SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

$$ET = \int_0^{w-x} {}_t p_x d_t = \int_0^{w-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} d_t$$

$$ET = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{w-1}}{l_x}$$

VJEROVATNO TRAJANJE ŽIVOTA

$$\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$$

Zadatak br. 5

Neka je poznat analitički izraz za funkciju doživljenja:

$$l_x = 100.000 \sqrt{1 - \frac{x}{110}} \quad 0 \leq x \leq 110$$

Odrediti vjerovatnoću da osoba stara 50 godina umre u toku naredne godine i izraziti je procentualno. Odrediti vjerovatno trajanje života i srednje trajanje života osobe iste starosti.

Rješenje:

$${}_1q_{50} = 1 - {}_1p_{50} = 1 - \frac{l_{51}}{l_{50}} = 1 - \frac{100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{51}{110}}}{100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{50}{110}}}$$

Zadatak br. 5

Vjerovatnoća da osoba stara 50 godina neće doživjeti narednu godinu je 0,837%.

$${}_1q_{50} = 1 - 0,99163 = 0,00837 \approx 0,837\%$$

Srednje trajanje života osobe stare 50 godina:

$$ET = \int_0^{110-50} {}_tP_{50} d_t = \int_0^{60} \frac{l_{50+t}}{l_{50}} d_t \quad ET = \int_0^{60} \frac{100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{50+t}{110}}}{100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{50}{110}}} d_t$$

Zadatak br. 5

$$ET = \int_0^{60} \frac{\sqrt{\frac{110-50-t}{110}}}{\sqrt{\frac{110-50}{110}}} d_t$$

$$ET = \int_0^{60} \frac{\sqrt{60-t}}{\sqrt{60}} d_t = \frac{1}{\sqrt{60}} \int_0^{60} \sqrt{60-t} \cdot d_t$$

$$ET = \frac{1}{\sqrt{60}} \int_{60}^0 z^{\frac{1}{2}} \cdot (-d_z) = -\frac{1}{\sqrt{60}} \cdot \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{60}^0$$

$$ET = -\frac{2}{3\sqrt{60}} \cdot (0^{\frac{3}{2}} - 60^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3\sqrt{60}} \cdot 60 \cdot \sqrt{60}$$

$$60-t = z$$

$$-d_t = d_z$$

t	0	60
z	60	0

$$ET = 40$$

Zadatak br. 5

Vjerovatno trajanje života osobe stare 50 godina:

$$l_{50+k} = \frac{l_{50}}{2}$$

$$100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{50+k}{110}} = \frac{1}{2} \cdot 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{50}{110}}$$

$$\sqrt{\frac{110-50-k}{110}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{110-50}{110}}$$

$$\frac{60-k}{110} = \frac{1}{4} \cdot \frac{60}{110}$$

$$60-k = \frac{60}{4}$$

$$\Rightarrow k = 45$$

Zadatak br. 6

Data je funkcija $\mu_x = \frac{1}{2(102-x)}$ i $l_0 = 100.000$.

- a) *Odrediti funkciju doživljenja i skicirati njen grafik. Odrediti najdublju starost.*
- b) *Izračunati jednokratnu premiju koju treba da uplati osoba stara 48 godina da bi osigurala odloženu (10 godina) privremenu (3 godine) anticipativnu ličnu rentu u iznosu od 4.000€. Kamatna stopa je 6%.*

Zadatak br. 6

$$a) \quad \mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}$$

$$\Rightarrow l_x = C \cdot e^{-\int \mu_x dx}$$

$$l_x = C \cdot e^{-\int \frac{1}{2(102-x)} dx} = C \cdot e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{102-x} dx} = \begin{cases} 102 - x = v \\ -dx = dv \\ dx = -dv \end{cases}$$

$$l_x = C \cdot e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{v} (-dv)} = C \cdot e^{\frac{1}{2} \int \frac{dv}{v}} = C \cdot e^{\frac{1}{2} \ln v}$$

$$l_x = C \cdot e^{\ln \sqrt{v}} = C \cdot \sqrt{v}$$

$$l_x = C \cdot \sqrt{102 - x}$$

Zadatak br. 6

$$l_x = C \cdot \sqrt{102 - x}$$

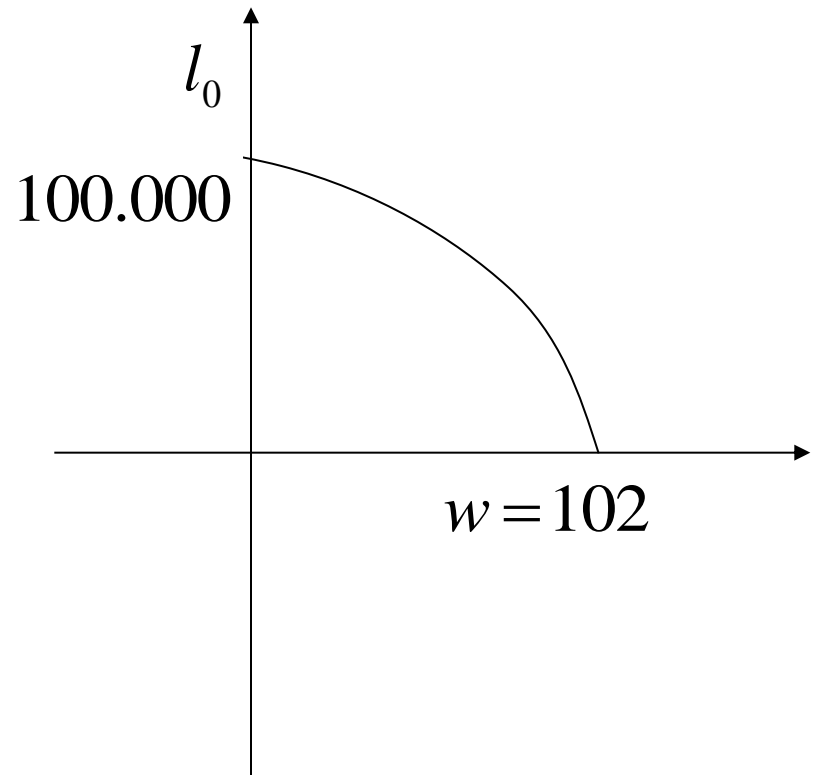
$$l_0 = 100.000$$

$$l_0 = C\sqrt{102} \Rightarrow 100.000 = C\sqrt{102} \Rightarrow C = \frac{100.000}{\sqrt{102}}$$

$$l_x = \frac{100.000}{\sqrt{102}} \cdot \sqrt{102 - x}$$

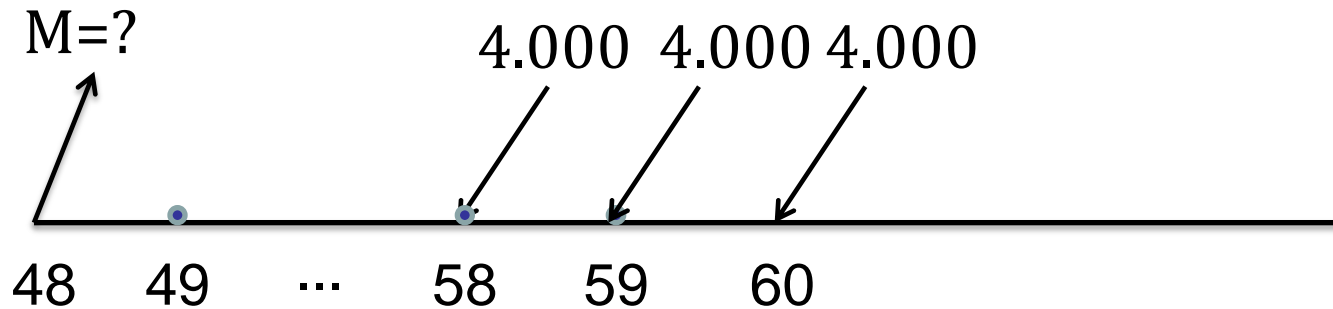
$$l_x = 100.000 \cdot \sqrt{\frac{102 - x}{102}}$$

$$l_x = 100.000 \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{102}}$$



Zadatak br. 6

b) Riječ je o osiguranju odložene (10 godina) privremene (3 godine) anticipativne lične rente.



$$M = \frac{R}{q^{10}} \cdot \frac{l_{58}}{l_{48}} + \frac{R}{q^{11}} \cdot \frac{l_{59}}{l_{48}} + \frac{R}{q^{12}} \cdot \frac{l_{60}}{l_{48}}$$

$$l_{48} = 100.000 \sqrt{1 - \frac{48}{102}} = 72.760,687 \quad l_{58} = 100.000 \sqrt{1 - \frac{58}{102}} = 65.678,957$$

Zadatak br. 6

$$l_{59} = 100.000 \sqrt{1 - \frac{59}{102}} = 64.928,316$$

$$l_{60} = 100.000 \sqrt{1 - \frac{60}{102}} = 64.168,894$$

$$M = \frac{4.000}{1,06^{10}} \cdot \frac{65.678,957}{72.760,687} + \frac{4.000}{1,06^{11}} \cdot \frac{64.928,316}{72.760,687} + \frac{4.000}{1,06^{12}} \cdot \frac{64.168,894}{72.760,687}$$

$$\boxed{M = 5.649,65}$$